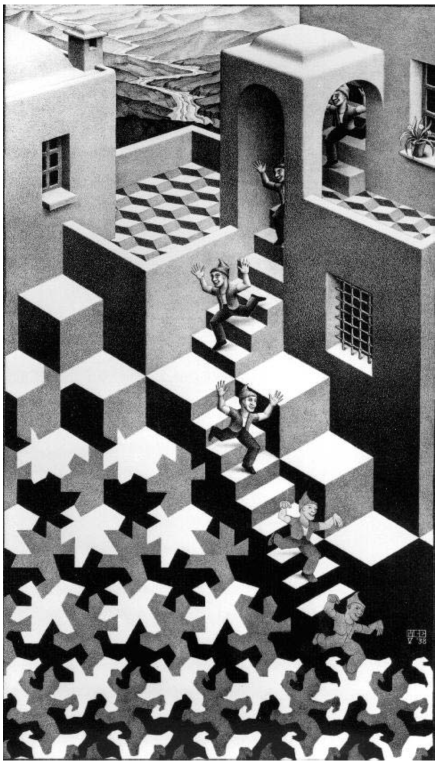
Die Sprache der Mathematik

Mengen und Logik



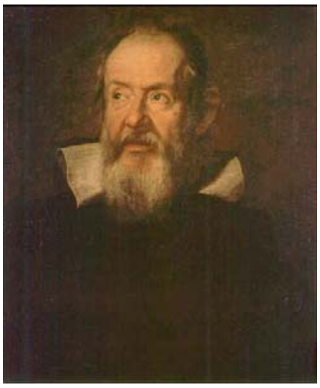
Syllabus

P. Lemmens - D. van Straten

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Philosophie ist geschrieben in diesem großartigen Buch, welches uns durchgehend zur Anschauung offen steht: das Universum. Aber dieses Buch kann nicht verstanden werden, wenn man nicht erst die Sprache verstehen lernt und die Buchstaben lesen kann, aus welchen es geschrieben ist. Es ist geschrieben in **der Sprache der Mathematik** *und seine Buchstaben sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren, ohne die es menschlicherweise unmöglich ist, ein einziges Wort zu verstehen; ohne dies wandert man vergeblich in ein dunkles Labyrinth.* [1]



Galileo Galilei (1564-1642)

In welcher Sprache aber ist die Mathematik selbst geschrieben? Und was ist Mathematik eigentlich? Diese Fragen sind nicht so einfach zu beantworten. Auf jeden Fall spielt in der Mathematik, wie in allen Wissenschaften, das *schlüssige Argumentieren* die entscheidende Rolle. Die Mathematik unterscheidet sich von den anderen Wissenschaften durch die konsequente Anwendung der *axiomatischen Methode.* Dies bedeutet Folgendes. Wenn ein neuer Begriff benutzt wird, so muss dieser durch eine klare **Definition** auf schon bekannte Begriffe zurückgeführt werden. So weitergehend stößt man schließlich auf primitive Begriffe, die nicht weiter definiert werden können. Für diese werden **Axiome** postuliert, welche uns sagen, wie wir mit den primitiven Begriffen umgehen dürfen, und so als eine Art implizite Definition dieser Begriffe angesehen werden können. Ein **Satz** ist eine wahre Aussage über wohldefinierte Begriffe, ein **Beweis** eine logische Herleitung aus den Axiomen. Am Ende eines Beweises schreibt ein Mathematiker oft stolz QED, eine Abkürzung von *Quod erat demonstrandum.*

[1] *La filosofia è scritta in questo grandissimo libro, che continuamente ci sta aperto innanzi gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne'quali è scritto. Egli è scritto in lingua mathematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intendere umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.*

EUKLID hat in seinem Werk *Die Elemente* diese axiomatische Herangehensweise erstmals systematisch durchgeführt. In 13 Teilen wird die ganze damals bekannte Geometrie aus wenigen Axiomen für die primitiven Begriffe *Punkt* und *Gerade* hergeleitet. Dieses außergewöhnliche Werk ist nach der Bibel das meist verbreitete Buch überhaupt und war bis vor nicht all zu langer Zeit das Herzstück des bürgerlichen Bildungskanons.
Die Mathematik umfasst aber nicht nur Geometrie, sondern viele weitere Gebiete, wie Algebra, Zahlentheorie, Topologie und Analysis. Es stellt sich heraus, dass es tatsächlich möglich ist, die gesamte Mathematik auf ein gemeinsames Fundament zu bauen. Diese gemeinsame Basis hat die *Menge* als primitiven Begriff. Da jeder Mensch ein gutes intuitives Verständnis von Mengen hat, sind die Axiome so einleuchtend, dass man sie kaum als solche wahrnimmt. Man spricht in diesem Zusammenhang von *naiver Mengenlehre* und jeder Mathematikstudent sollte selbsverständlich ein gründliches Verständnis dieser mengentheortischen Basis haben.
Dieser Text ist eine leichte Überbearbeitung und Erweiterung eines Textes, welcher vor etwa 30 Jahren von PIET LEMMENS als kleine Hilfe für Anfänger in der Mathematik an der Rijksuniversität in Utrecht verfasst wurde; es gab keine dazugehörige Lehrveranstaltung.

PIET LEMMENS (1924-2015)

Man sollte diese Sprache der Mathematik aber nicht verwechseln mit der Mathematik selbst. Diese handelt von Matrizen, Integralen, Mannigfaltigkeiten, Primzahlen, Differentialgleichungen, Banachräume, Splines, Sylow-Untergruppen, Garben, Kohomologie, und vieles mehr. Sie wird in Vorlesungen, Seminaren und Lehrbüchern behandelt.

Lesetipps:
R. COURANT UND H. ROBBINS: *Was ist Mathematik?*, Springer Verlag.
P. HALMOS: *Naive Mengenlehre*, Vandenhoeck und Ruprecht.

1 Mengen

1.1 Manchmal, zum Beispiel um Schreibarbeit zu sparen, ist es in der Mathematik vernünftig, gewisse Objekte gleichzeitig zu betrachten. In so einem Fall bilden wir eine *Menge* von Objekten. Die Objekte heißen *Elemente* der Menge. Wir bezeichnen hier eine Menge mit einem Großbuchstaben, die Elemente werden mit kleinen Buchstaben angegeben. Der Sachverhalt "a ist ein Element der Menge A" wird verkürzt mit

$$a \in A$$

notiert. Wollen wir hingegen angeben, dass ein Objekt x nicht zu der Menge A gehört, so setzen wir einfach einen Strich durch das $\in$-Symbol.

$$x \notin A$$

bedeutet also, dass x kein Element von A ist.

1.2 In vielen Fällen können wir eine Menge beschreiben, indem wir alle Elemente explizit aufschreiben. So geben wir mit

$$X = \{a, b, c, d\}$$

an, dass

$$a \in X, \quad b \in X, \quad c \in X, \quad d \in X$$

und daß X keine anderen Elemente hat.

1.3 Zwei Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente besitzen. Also bedeutet

$$A = B,$$

dass für jedes x gilt

$$x \in A \quad \text{dann und nur dann wenn} \quad x \in B.$$

Insbesondere ist also

$$\{a, b, c, d\} = \{c, b, d, a\},$$

es kommt auf die Reihenfolge der Elementen nicht an. Bemerke, dass auch

$$\{a, a, b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$$

1.4 Eine Menge A heißt *Teilmenge* einer Menge B, wenn alle Elemente von A auch zu B gehören. Wir notieren dies als

$$A \subset B.$$

Oft findet man auch die Bezeichnung

$$A \subseteq B$$

mit genau derselben Bedeutung. Hierbei ergibt sich eine kleine Schwierigkeit. Jemand, der gewohnt ist, die Bezeichnung $A \subseteq B$ zu benutzen, meint mit der Bezeichnung $A \subset B$ dass $A \subseteq B$ gilt, aber außerdem, daß $A \neq B$. In der Praxis rufen diese unterschiedliche Notationen nur selten Schwierigkeiten hervor. In diesem Syllabus bedeutet $A \subset B$ also, dass für alle x gilt: wenn $x \in A$, dann $x \in B$. Wenn wir in diesem Text angeben wollen dass A eine Teilmenge von B ist, aber $A \neq B$, dann schreiben wir

$$A \subsetneq B.$$

Ist $A \subset B$ nicht der Fall, so schreiben wir

$$A \not\subset B.$$

Die folgenden wichtigen Eigenschaften des Inklusionszeichens $\subset$ sind einfach zu verifizieren:

1. Für jede Menge A gilt: $A \subset A$.
2. Wenn $A \subset B$ und $B \subset C$, dann ist $A \subset C$.
3. Wenn $A \subset B$ und $B \subset A$, dann ist $A = B$.

1.5 Die Menge der ersten n natürlichen Zahlen geben wir in diesem Text mit $\underline{n}$ an. Also

$$\underline{n} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

Dann gilt zum Beispiel

$$\underline{3} \subset \underline{5}, \quad 3 \in \underline{5}, \quad \{3\} \subset \underline{5}, \quad \{2,3\} \subset \underline{3}, \quad 5 \notin \underline{3}, \quad \underline{5} \not\subset \underline{3}.$$

Betrachte nun die Menge

$$A = \{\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}\}.$$

Die Elemente von A sind selbst wieder Mengen. Es gilt

$$2 \in \underline{2}, \quad \underline{2} \in A,$$

aber $2 \notin A$. Es ist $\{\underline{2}, \underline{3}\} \subset A$, aber $\{2, 3\} \not\subset A$.

1.6 Wir können eine Teilmenge durch eine charakterisierende Eigenschaft der Elemente angeben. Ist $P(x)$ eine Aussage über die Elemente x einer Menge X, dann geben wir mit

$$\{x \in X \ \mid \ P(x)\}$$

die Teilmenge von X an, welche genau aus den Elementen x von X besteht, für die die Aussage $P(x)$ *wahr* ist. Andere oft benutzte Bezeichnungen sind $\{x \in X \ : \ P(x)\}$ oder auch $\{x \mid P(x)\}$ wenn die Menge X vorher festgelegt wurde. Aus der Definition gilt also immer

$$\{x \in X \ \mid P(x)\} \subset X.$$

1.7 Beispiele
Sei $X = \underline{6}$ und $P(x) =$ "x ist ein Teiler von 8". Dann ist $\{x \in X \mid P(x)\} = \{1, 2, 4\}$. Man sieht hier, dass verschiedene Aussagen durchaus zu der selben Teilmenge führen können. Sei $Q(x) =$ "x ist ein Teiler von 4", dann ist

$$\{x \in X \mid P(x)\} = \{x \in X \mid Q(x)\}$$

1.8 Die Notation $\{x \in X \mid P(x)\}$ zwingt uns zur Einführung einer *leeren Menge*, weil es durchaus passieren kann, dass für jedes $x \in X$ die Aussage $P(x)$ falsch ist. Ein Beispiel ist $X = \underline{6}$ und $P(x) =$ "$x > 7$".
Die *leere Menge* notieren wir $\emptyset$. $X = \emptyset$ bedeutet also, dass X keine Elemente besitzt. Anders gesagt: für alle x gilt $x \notin X$. Aus logischen Gründen können wir schließen:

1. Es gibt nur eine leere Menge.
2. Für jedes X gilt: $\emptyset \subset X$.
3. Wenn $A \subset \emptyset$, dann $A = \emptyset$.

Die Teilmengen $\emptyset$ und X nennen wir die *trivialen Teilmengen* von X.

1.9 Die Menge, welche genau alle Teilmengen von X als Elemente besitzt, heißt die *Potenzmenge* von X und wird mit $\mathcal{P}(X)$ notiert. Ist zum Beispiel $X = \underline{3}$, so ist

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

1.10 Sind zwei Mengen A und B gegeben, so können wir deren *Durchschnitt* $A \cap B$ bilden, welcher genau aus allen Elementen besteht, welche sowohl zu A als auch zu B gehören. Also:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}.$$

Bemerke, dass

$$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\} = \{x \in B \mid x \in A\}.$$

Es ist also

$$A \cap B = B \cap A,$$

die Durchschnittsbildung ist *kommutativ*, es kommt auf die Reihenordnung nicht an. Weiter ist klar, dass $A \cap B \subset A$ und $A \cap B \subset B$. Besitzen A und B keine gemeinsamen Elemente, so ist $A \cap B = \emptyset$. Man verifiziert ohne Mühe folgende Regeln:

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$.
2. $A \cap A = A$.
3. Wenn $C \subset A$ und $C \subset B$, dann $C \subset A \cap B$.
4. $A \subset B$ dann und nur dann, wenn $A \cap B = A$.

1.11 Auch kann man aus zwei Mengen A und B die *Vereinigung* $A \cup B$ bilden, welche aus allen Elementen besteht, welche mindestens einer der beiden Mengen angehören. Also

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$

Mit "$x \in A$ oder $x \in B$" meinen wir hier x in A oder x in B oder eventuell x in A *und* x in B. In der Mathematik wird das Wort "oder" fast immer in der *nicht ausschließenden Bedeutung* benutzt. Klar ist $A \cup B = B \cup A$ und $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$. Man verifiziert wieder ohne Mühe, dass folgende Regeln gelten:

1. $A \cup \emptyset = A$.
2. $A \cup A = A$.
3. Wenn $A \subset C$ und $B \subset C$, dann $A \cup B \subset C$.
4. $A \subset B$ dann und nur dann, wenn $A \cup B = B$.

1.12 Mit drei oder mehr Mengen A, B, C kann man die Operationen $\cap$ und $\cup$ in verschiedenen Reihenfolgen ausführen. Es gelten folgende Regeln:

$$1. \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$2. \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$\cap$ und $\cup$ sind also *assoziativ*. Das Ergebnis hängt nicht davon ab, in welcher Reihenfolge man vorgeht. Aus diesem Grund lässt man die Klammer oft weg und schreibt einfach $A \cap B \cap C$ statt $A \cap (B \cap C)$ und $A \cup B \cup C$ statt $A \cup (B \cup C)$. Außerdem gilt:

$$3. \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

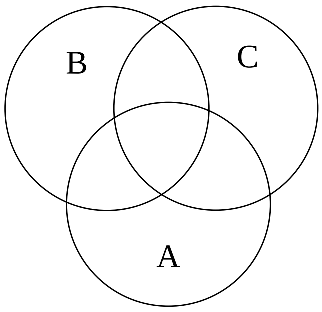
$$4. \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Dies sind die *Distributivitätsregeln*. Werden $\cap$ und $\cup$ durcheinander benutzt, so ist es sehr wichtig, auf die Klammerung zu achten.

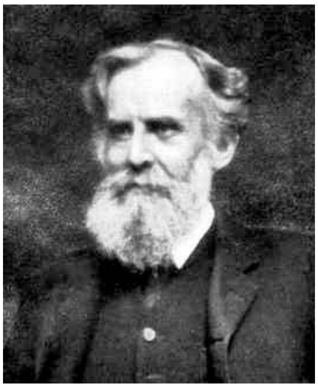
1.13 Diese Regel kann man sehr schön mit Bildern in der Ebene illustrieren. Als Beispiel nehmen wir Regel 4.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Betrachte in der Ebene die Mengen, welche von den angegebenen Kreisen umschlossen werden.



Solche Diagramme werden *Venn-Diagramme* genannt, nach ihrem Erfinder.



John Venn (1834-1924)

1.14 Um ein Idee zu geben, wie man so eine Regel über Mengen *beweist*, geben wir hier einen

Beweis. **für Regel 3:** Erst zeigen wir, dass

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Sei $x \in A \cap (B \cup C)$. Dies bedeutet, dass $x \in A$ *und* $x \in B \cup C$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten: $a \in A$ *und* $x \in B$, oder $x \in A$ *und* $x \in C$. Im ersten Fall ist $x \in A \cap B$, also sicher $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Im zweiten Fall ist $x \in A \cap C$, also auch sicher $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Wir haben also nachgewiesen:
Wenn $x \in A \cap (B \cup C)$, dann $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Aber diese Aussage ist genau die Definition von

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Wir müssen jetzt noch zeigen, dass auch

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C).$$

Nun: $A \cap B \subset A$ und $A \cap C \subset A$, also ist

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \qquad (1).$$

Außerdem gilt

$$A \cap B \subset B \subset B \cup C,$$

$$A \cap C \subset C \subset B \cup C,$$

also

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset (B \cup C) \qquad (2).$$

(1) und (2) liefern zusammen

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C),$$

was zu zeigen war.

QED

1.15 Sind A und B zwei Mengen, so bezeichnet $A \setminus B$ die Menge aller Elemente von A, die nicht in B liegen. Also

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Bemerke, dass die Notation $A \setminus B$ nicht voraussetzt dass $B \subset A$.
Mühelos verifiziert man folgende Regel

1. $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$.
2. $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$.
3. $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$.

1.16 Ist A eine Teilmenge von U, also $A \subset U$, so nennt man $U \setminus A$ das *Komplement von A in U*. Für *Teilmengen* A und B von U gelten folgende Regeln (verifiziere sie selber!):

1. $A \cup (U \setminus A) = A$, $A \cap (U \setminus A) = \emptyset$.
2. $U \setminus (U \setminus A) = A$.
3. $A \subset B$ dann und nur dann wenn $(U \setminus B) \subset (U \setminus A)$.
4. $U \setminus (A \cap B) = (U \setminus A) \cup (U \setminus B)$.
5. $U \setminus (A \cup B) = (U \setminus A) \cap (U \setminus B)$.

Augustus De Morgan (1806-1871)

Die letzten zwei Regeln heißen die *Reziprozitätsgesetze* von de Morgan, welche $\cup$ und $\cap$ vertauschen.

Legen wir vorher fest, dass alle in Betracht kommenden Mengen Teilmengen einer festen Menge U sind, so nennt man $U \setminus A$ einfach das *Komplement* von A. Für das Komplement von A findet man manchmal die Notation $\complement A$. Die de Morganschen Regeln lauten dann $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$,

$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$.

1.17 Die Standard-Zahlenmengen sind:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, die Menge der *natürlichen Zahlen,*

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, die Menge der *natürlichen Zahlen mit der* 0,

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$, die Menge der *ganzen Zahlen*,

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in N\}$, die Menge der *rationalen Zahlen*,

$\mathbb{R}$, die Menge der *reellen Zahlen.*

Es ist

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Sind $a, b \in \mathbb{R}$, so schreibt man noch:

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && \text{offenes Intervall,} \\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} && \text{halboffenes Intervall,} \\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} && \text{halboffenes Intervall,} \\
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} && \text{geschlossenes Intervall,}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \\
[a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \\
(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, \\
(-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}.
\end{aligned}$$

Die reellen Zahlen werden in der Vorlesung zur Analysis genau definiert. Später werden Sie noch die Menge der *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$ kennen lernen.

1.18 Ist für jedes $i \in I$ eine Menge A_i gegeben, so nennt man I oft *Indexmenge* für die Mengen A_i. Man definiert $\bigcap_{i\in I} A_i$ als die Menge von Elemente welche zu alle A_i gehören, und $\bigcup_{i\in I} A_i$ als die Menge von Elemente welche zu mindestens einer der Mengen A_i gehört.

$$\bigcup_{i\in I} A_i \quad := \quad \{a \in A \mid a \in A_i \text{ für ein } i \in I\},$$
$$\bigcap_{i\in I} A_i \quad := \quad \{a \in A \mid a \in A_i \text{ für alle } i \in I\}.$$

Für $\bigcap$ und $\bigcup$ gelten ähnliche Regeln wie bei Durchschnitt und Vereinigung von zwei Mengen. Sind zum Beispiel alle $A_i \subset U$, so gelten wieder DE MORGANsche Regeln:

$$U \setminus (\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I}(U \setminus A_i)$$
$$U \setminus (\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I}(U \setminus A_i)$$

2 Logik

(2.1) Im ersten Kapitel sind wir wiederholt auf Formulierungen gestoßen wie

"Für jedes x gilt ...",
"wenn ..., dann ...",
"dann und nur dann, wenn",
"und", "oder", "nicht" .

Weil diese und andere logische Begriffe sehr oft in mathematischen Formulierungen und Beweisen vorkommen, hat man sogenannte *logische Symbole* eingeführt, durch welche man sie ersetzen kann. Wir geben hier die meistvorkommenden Symbole.

Die *Quantoren:*

$\forall$ "Für alle",

$\exists$ "Es existiert".

Oft benutzt wird noch

$$\exists\,! \text{ “Es existiert genau ein “.}$$

Die *Konnektiven*

$\Longrightarrow$ ”wenn …, dann …”

$\Leftrightarrow$ ”dann und nur dann, wenn”

$\vee$ ”oder”

$\wedge$ ”und”

$\neg$ ”nicht”

2.1 Mit Hilfe dieser logischen Symbole ist es möglich, mathematische Aussagen sehr kompakt zu notieren.

1. Für jede reelle Zahl x gilt: wenn $|x| = 1$, dann ist $x = 1$ oder $x = -1$. In der Sprache der Logik wird dies

$$(\forall x \in \mathbb{R})(|x| = 1 \Longrightarrow (x = 1) \vee (x = -1))$$

2. Die Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$ hat eine reelle Nullstelle. In der Sprache der Logik:

$$(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 + x - 1 = 0).$$

3. Die Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$ hat keine reelle Nullstelle. In der Sprache der Logik:

$$(\neg \exists x \in \mathbb{R})(x^2 + x + 1 = 0).$$

oder, was logisch äquivalent ist:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 + x + 1 \neq 0).$$

4. Es seien A und B Teilmengen von U. Die Definition von $A = B$ ist: für alle $x \in U$ gilt: $x \in A$ dann und nur dann, wenn $x \in B$. In der Sprache der Logik:

$$A = B \Longleftrightarrow (\forall x \in U)(x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$$

Genau so finden wir für $A \subset B$ den Ausdruck

$$A \subset B \Longleftrightarrow (\forall x \in U)(x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

und für die Aussage $A \cap B \neq \emptyset$

$$A \cap B \neq \emptyset \Longleftrightarrow (\exists x \in U)(x \in A \wedge x \in B)$$

2.2 Sie werden feststellen, dass in mathematischen Texten sehr sparsam mit logischen Symbolen umgegangen wird, die Symbole $\neg, \vee, \wedge$ werden sogar kaum benutzt. Die Forschungsmathematik ist weitgehened frei von logischen Symbolen.

2.3 Eine Aussage (Proposition) p kann *wahr* oder *falsch* sein. Aus zwei Aussagen p und q entsteht eine neue Aussage durch Verknüpfung mit Hilfe der Konnektiven. Die Wahrheit der zusammengesetzten Aussage hängt ab von den einzelnen Teilen.

$\neg p$ ist genau dann wahr, wenn p falsch ist.

$p \vee q$ ist nur dann falsch, wenn p und q *beide falsch* sind.

$p \wedge q$ ist nur wahr, wenn p und q *beide wahr* sind.

$p \Longrightarrow q$ ist nur falsch, wenn p wahr ist und q falsch. In allen anderen Fällen ist $p \Longrightarrow q$ wahr. Insbesondere ist $p \Longrightarrow q$ wahr, wenn p falsch ist. Das hört sich doof an, aber aus etwas Unwahrem kann man alles folgern.

$p \Longleftrightarrow q$ ist nur wahr, wenn p und q *beide wahr* oder *beide falsch* sind.

Man fasst dies oft in einer *Wahrheitstafel* zusammen

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f	f
f	w	w	w	f	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Durch wiederholte Anwendung der Wahrheitstafel kann man die Wahrheit von komplizierteren zusammengesetzten Propositionen feststellen.

Eine Aussage, welche unabhängig von der Wahrheit der Bestandteile immer wahr ist, nennt man auch eine *Tautologie*. Beispiele sind folgende Aussagen:

$$p \vee (\neg p)\,,$$

$$p \Longleftrightarrow \neg(\neg p)\,,$$

$$p \wedge (p \Longrightarrow q) \Longrightarrow q\,.$$

Die letzte Regel besagt, dass wir aus p und $p \Longrightarrow q$ auch q folgern können.

2.4 Zwei zusammengesetzte Aussagen heißen *logisch äquivalent*, wenn sie die gleiche Wahrheitstafel haben. Verifiziere selbst, dass:

$$\begin{array}{lll} \neg(p \vee q) & \text{ist äquivalent zu} & (\neg p) \wedge (\neg q)\,, \\ \neg(p \wedge q) & \text{ist äquivalent zu} & (\neg p) \vee (\neg q)\,, \\ p \Longrightarrow q & \text{ist äquivalent zu} & \neg(p \wedge \neg q)\,, \\ p \Longrightarrow q & \text{ist äquivalent zu} & (\neg q) \Longrightarrow (\neg p)\,, \\ p \Longleftrightarrow q & \text{ist äquivalent zu} & (p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)\,. \end{array}$$

Bemerke, dass P äquivalent ist zu Q genau dann, wenn die Aussage $P \Longleftrightarrow Q$ eine Tautologie ist.

2.5 Beachte, dass $p \Longrightarrow q$ **nicht** äquivalent ist zu $(\neg p) \Longrightarrow (\neq q)$. Als Beispiel sei n eine natürliche Zahl, und p die Aussage "n ist durch 4 teilbar", q die Aussage "n ist durch 2 teilbar". Ist eine Zahl durch 4 teilbar, so ist sie sicher durch 2 teilbar, also ist die Aussage $p \Longrightarrow q$ sicherlich wahr. Aber $\neg p$ ist die Aussage "n ist nicht durch 4 teilbar", $\neg q$ die Aussage "n ist nicht durch 2 teilbar". Die Aussage $(\neg p) \Longrightarrow (\neg q)$ ist falsch. Aus der Tatsache, dass eine Zahl nicht durch 4 teilbar ist, dürfen wir offensichtlich nicht folgern, dass diese Zahl nicht durch 2 teilbar ist.
Dahingegen ist $p \Longrightarrow q$ äquivalent zu $(\neg q) \Longrightarrow (\neg p)$ und im obenstehenden Beispiel ist in der Tat $(\neg q) \Longrightarrow (\neg p)$ wahr: Wenn eine Zahl nicht durch 2 teilbar ist, dann ist sie sicherlich nicht durch 4 teilbar.

2.6 Ein *Prädikat* ist eine Aussage, welche von einer oder mehreren Variablen abhängt. Setzen wir für die Variablen Werte ein, so entsteht eine einfache Proposition, welche wahr oder falsch ist. Wir hatten vorher eigentlich schon mit Prädikaten zu tun. Das Prädikat "n ist durch 4 teilbar"

geht durch *Substitution* von $n = 3$ über in die unwahre Proposition “3 ist durch 4 teilbar”.
Das Prädikat $P(x) =$ ”$x \in [0,1]$” geht durch Substitution von $x = \frac{1}{2}$ über in die wahre Proposition “$\frac{1}{2} \in [0,1]$”.

2.7 Ein Prädikat $P(x)$ kann auch zur Proposition werden, wenn wir die Variable “binden”, indem wir vor $P(x)$ $(\exists x \in U)$ oder $(\forall x \in U)$ schreiben. Hierbei ist dann U irgendeine Menge. Es entstehen die Propositionen

$(\exists x \in U)P(x)$: “Es exisitert ein $x \in U$, für das $P(x)$ wahr ist”

$(\forall x \in U)P(x)$: “Für alle $x \in U$ ist $P(x)$ wahr”

Zum Beispiel:
$(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 + x - 1 = 0)$ ist eine wahre Proposition.
$(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 + x - 1 = 0)$ ist eine falsche Proposition.

2.8 Bei Negation werden $\exists$ und $\forall$ vertauscht. Es gilt:

$$\neg[(\forall x \in U)P(x)] \iff [(\exists x \in U)(\neg P(x))]\,,$$

$$\neg[(\exists x \in U)P(x)] \iff [(\forall x \in U)(\neg P(x))]\,.$$

Beispiel: Für eine Teilmenge $A \subset U$ gilt

$$A = \emptyset \iff [(\forall x \in U)\neg(x \in A)]\,.$$

Die logische Negation liefert

$$A \neq \emptyset \iff [(\exists x \in U)(x \in A)]\,.$$

2.9 Aufeinanderfolgende Quantoren werden wie folgt gelesen:

$(\forall x \in U)(\forall y \in V)\ldots$	Für alle $x \in U$ und alle $y \in V\ldots$
$(\exists x \in U)(\exists y \in V)\ldots$	Es gibt $x \in U$ und $y \in V$, so dass...
$(\exists x \in U)(\forall y \in V)\ldots$	Es gibt $x \in U$, so dass für alle $y \in V$ gilt ...
$(\forall x \in U)(\exists y \in V)\ldots$	Für alle $x \in U$ gibt es $y \in V$, so dass ...

Beispiel: Es sei $U = V = \mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Wir schreiben verkürzt $\forall x$ und $\exists x$ für $\forall x \in \mathbb{R}$ und $\exists x \in \mathbb{R}$. Betrachte das Prädikat $x > y$.

1. $(\forall x)(\forall y)(x > y)$ ist falsch, weil $x > y$ unwahr ist für $x = 0$ und $y = 1$.

2. $(\exists x)(\exists y)(x > y)$ ist wahr, weil $x > y$ wahr ist für $x = 1$ und $y = 0$.

3. $(\exists x)(\forall y)(x > y)$ ist falsch, weil ich für jede Wahl von x ein y finden kann, so dass $x > y$ falsch ist, z.B. $y = x + 1$.

4. $(\forall x)(\exists y)(x > y)$ ist wahr, weil ich für jedes x ein y finden kann, so dass $x > y$ wahr ist, z.B. $y = x - 1$.

Beispiele 3. und 4. zeigen, dass die Quantoren $\forall$ und $\exists$ **nicht ohne weiteres** vertauscht werden dürfen:

$$(\forall x)(\exists y)(x > y) \text{ ist wahr,}$$

$$(\exists y)(\forall x)(x > y) \text{ ist falsch.}$$

2.10 Die Relationen $=$, $\subset$ und die Operationen $\cap$, $\cup$ und $\setminus$ für Mengen A und B entsprechen den Konnektiven $\Longleftrightarrow$, $\Longrightarrow$, $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ und den Prädikaten "$x \in A$" und "$x \in B$", wie nachfolgende Tabelle zeigt:

$A = B$	$x \in A \Longleftrightarrow x \in B$
$A \subset B$	$x \in A \Longrightarrow x \in B$
$A \cap B$	$x \in A \wedge x \in B$
$A \cup B$	$x \in A \vee x \in B$
$A \setminus B$	$x \in A \wedge \neg(x \in B)$

3 Abbildungen

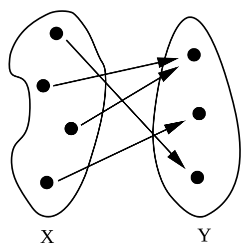
Definition 3.1 Eine *Abbildung* von einer Menge X in eine Menge Y ist eine Vorschrift f, die jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zuordnet. Wir notieren dies mit

$$f : X \longrightarrow Y$$

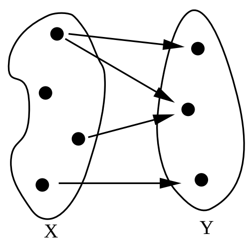
oder

$$X \xrightarrow{f} Y$$

Wenn $x \in X$ durch f ein $y \in Y$ zugeordnet wird, so heißt y auch das Bild von x unter f und man schreibt $y = f(x)$. Eine Abbildung wird manchmal auch *Funktion* genannt.



Eine Abbildung



Keine Abbildung

3.2 Eine Abbildung wird bestimmt durch *drei* Daten; X, Y und der Vorschrift f. Wir nennen

X die *Definitionsmenge* von f.
Y die *Wertemenge*,
$f(x)$ das *Bild* von x unter f.
x heißt ein *Urbild* von y, wenn $f(x) = y$.

3.3 Beispiele

1. Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Betrachte die Abbildung "sinus"

$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$

   Statt f schreiben wir jetzt also sin. Bekanntlich ist $\sin(x)$ eindeutig bestimmt für jede reelle Zahl x. Aber ein $y \in \mathbb{R}$ kann durchaus mehrere Urbilder haben. Auch kann es passieren, dass ein $y \in \mathbb{R}$ gar keine Urbilder hat.

2. Wir betrachten nochmals die Abbildung "sinus", aber jetzt mit dem Intervall $[0, \pi]$ als Definitionsmenge und $[0, 1]$ als Wertemenge. Nach der Definition des Begriffs Abbildung

müssen wir diese Abbildung schon unterscheiden von der "sinus"-Abbildung im vorherigen Beispiel. Das ergibt sich auch aus der Tatsache, dass es in diesem Fall keine Elemente in der Wertemenge gibt, die keine Urbilder besitzen. Außerdem hat jedes $y \in [0,1]$ hier höchstens zwei Urbilder, und das ist im ersten Beispiel auch nicht der Fall.

3. Sei A die Menge aller Dreiecke in der Ebene und sei B die Menge aller Punkte der Ebene. Wir können eine Abbildung von A nach B konstruieren, indem wir zum Beispiel jedem Dreieck seinen Schwerpunkt zuordnen.

4. Sei A die Menge der Studenten, welche über ein Handy verfügen. Wir können dann eine Abbildung von A nach der Menge der ganzen Zahlen konstruieren, indem wir jedem a aus A seine Telefonnummer zuordnen.

3.4 Aus der Definition der Abbildung ergibt sich, dass wir zwei Abbildungen $f : A \longrightarrow B$ und $f : C \longrightarrow D$ mit "derselben Vorschrift" als *verschieden* auffassen müssen, wenn $A \neq C$ oder $B \neq D$. Ist in so einer Situation $A \subset C$ und $B \subset D$, dann nennen wir $f : A \longrightarrow B$ eine *Einschränkung* von $f : C \longrightarrow D$, oder auch $f : C \longrightarrow D$ eine *Erweiterung von* $f : A \longrightarrow B$. Der wichtigste Spezialfall ist $B = D$ und $A \subset C$, dann notieren wir die Einschränkung von $f : C \longrightarrow B$ oft $f|_A : A \longrightarrow B$. $f|_A$ heißt *die Einschränkung von f auf A*. Also, für $f : C \longrightarrow B$ und $A \subset C$ ist $f|_A : A \longrightarrow B$ definiert durch $f|_A(x) = f(x)$ für alle $x \in A$.

3.5 Es sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. In Beispiel 1 haben wir bereits gesehen, dass es Abbildungen gibt, für die nicht alle Elemente aus der Wertemenge ein Urbild besitzen. Wenn dies passiert, kommt offenbar nicht jedes $y \in B$ als $f(x)$ vor mit $x \in A$. Wir notieren

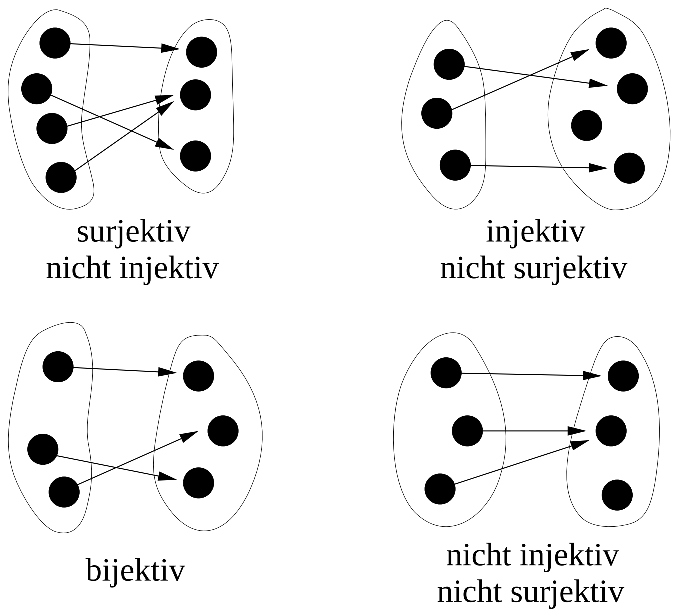
$$f(A) := \{y \in B \mid (\exists x \in A)(f(x) = y)\} = \{f(x) \mid x \in A\}$$

und nennen $f(A)$ das *Bild* von A unter f. Ist $f(A) = B$, dann tritt die beschriebene Situation also nicht auf und wir sagen: f ist eine Abbildung von A *auf* B, oder f ist eine *Surjektion*, oder f ist *surjektiv*. Um anzugeben, dass $f : A \longrightarrow B$ eine Surjektion ist, schreibt man manchmal $f : A \twoheadrightarrow B$.

Hat jedes $y \in B$ höchstens ein Urbild, also

$$(\forall u \in A)(\forall v \in A)(f(u) = f(v) \Rightarrow u = v),$$

dann sagen wir f ist *eins-zu-eins*, oder f ist eine *Injektion*, oder f ist *injektiv*. Um anzugeben, dass $f : A \longrightarrow B$ ein Injektion ist, schreibt man manchmal $f : A \hookrightarrow B$. Eine Abbildung, welche injektiv und surjektiv ist nennt man eine *Bijektion* oder man sagt, f ist *bijektiv*.



3.6 Beispiele Betrachte die Funktionsvorschrift $f(x) = x^2$ in den folgenden Fällen:

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$,
3. $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$,
4. $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 2]$.

Verifiziere:

1. f ist nicht injektiv, nicht surjektiv.
2. f ist nicht injektiv, aber surjektiv.
3. f ist injektiv und surjektiv, also eine Bijektion.
4. f ist injektiv, aber nicht surjektiv.

3.7 In vielen Fällen haben wir keinen Namen für eine Abbildung, so wie bei $\sin, \cos, \tan$, aber die Funktionsvorschrift ist doch einfach, wie bei $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = e^x$. Statt immer zu schreiben, "die Abbildung f mit $f(x) = \ldots$ verwenden wir die Notation $x \mapsto f(x)$. Zum Beipiel $x \mapsto x^3 + x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, was bedeutet: die Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 + x$. Oft schreibt man auch

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; x \mapsto x^3 + x$$

3.8 Gegeben sind zwei Abbildungen $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$, die Wertemenge von f stimmt also mit der Definitionsmenge von g überein. Dann können wir die *zusammengesetzte Abbildung*

$$g \circ f : A \longrightarrow C\,,$$

definiert durch $(g \circ f)(x) := g(f(x))$, betrachten.

3.9 Beispiele

1. $A = B = C = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$,
   dann ist $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^6$.

2. Sei A die Menge der Punkte auf einer festen Geraden l in der Ebene. Sei B die Menge der Halbgeraden in der Ebene, welche einen festen Punkt M als Endpunkt haben, $M \notin l$. Sei C die Menge von Punkten eines Kreises mit Mittelpunkt M. Sei $f : A \longrightarrow B$ die Abbildung, welche jedem Punkt von l die Halbgerade durch diesen Punkt mit M als Endpunkt zuordnet. Sei $g : B \longrightarrow C$ die Abbildung, welcher jede Halbgeraden aus B ihren Schnittpunkt mit dem Kreis zuordnet. Die zusammengesetzte Abbildung $g \circ f : A \longrightarrow C$ ist die Projektion aus M von l auf den Kreis. (Fertige eine Skizze der Situation an.)

3. Betrachte die Abbildungen

   $$f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty),\ x \longrightarrow x^2,$$

   $$g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}.$$

   Dann ist

   $$g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto |x|\,.$$

Satz 3.10 *Es seien $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$ Abbildungen. Dann gilt*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Beweis. Sei $x \in A$ beliebig. Dann gilt:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x)\,.$$

QED

Satz 3.11 *Es seien $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ Abbildungen.*

1. *Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.*

2. *Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.*

Beweis. 1) Angenommen, für x und x' aus A gilt $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Dies bedeutet $g(f(x)) = g(f(x'))$. In B haben wir jetzt $f(x)$ und $f(x')$, welche unter g dasselbe Bild besitzen. Da g injektiv ist, folgt $f(x) = f(x')$. Aber auch f ist injektiv, also folgt $x = x'$. Wir haben jetzt also gezeigt, dass $g \circ f$ injektiv ist.
2) Es sei $z \in C$. Da g surjektiv ist, gibt es ein $y \in B$ mit $g(y) = z$. Aber auch f ist surjektiv, also gibt es zu diesem $y \in B$ ein $x \in A$ mit $f(x) = y$. Also ist $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, also haben wir gezeigt, dass $g \circ f$ surjektiv ist. QED

Satz 3.12 *Es seien $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ Abbildungen.*

- *Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist g surjektiv.*
- *Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist f injektiv.*

Beweis. 1) Es sei $z \in C$, dann gibt es ein $x \in A$ mit $(g \circ f)(x) = z$, da $g \circ f$ surjektiv ist. Also ist $z = g(f(x))$ mit $f(x) \in B$. Also ist g surjektiv.
2) Ist $f(x) = f(x')$, dann auch $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Da $g \circ f$ injektiv ist, folgt $x = x'$ und somit ist auch f injektiv. QED

3.13 Es sei $f : A \longrightarrow B$ eine Bijektion. Dann gibt es zu jedem $y \in B$ *genau ein* $x \in A$ mit $f(x) = y$. Es entsteht so eine Abbildung $f^{-1} : B \longrightarrow A$ mit $f^{-1}(y) = x$. Diese Abbildung $f^{-1} : B \longrightarrow A$ heißt die *Inverse* von f.

3.14 Beispiel Betrachte die Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^3$. Es ist klar, dass diese Abbildung bijektiv ist. Die inverse Abbildung wird gegeben durch $f^{-1}(x) = x^{1/3}$. Bedenke also gut, dass $f^{-1}(x)$ etwas ganz anderes ist als $(f(x))^{-1}$ (wenn dies überhaupt einen Sinn macht). In diesem Beispiel ist $(f(x))^{-1} = x^{-3}$.

3.15 Zu jeder Menge A existiert eine sehr spezielle Abbildung $id_A : A \longrightarrow A$, gegeben durch $id_A(x) = x$ für alle $x \in A$. Wir nennen diese Abbbildung die *identische Abbildung von A*, oder *die Identität auf A*. Sie wird manchmal auch als 1_A notiert. Klar ist $(id_A)^{-1} = id_A$.

3.16 Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Bijektion, mit der Inversen $f^{-1} : B \longrightarrow A$. Dann gilt:

$$f^{-1} \circ f = id_A, \quad f \circ f^{-1} = id_B\,.$$

3.17 Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Dann gilt:

$$f \circ id_A = f = id_B \circ f\,.$$

Satz 3.18 *Seien $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow A$ Abbildungen und es gelte*

$$g \circ f = id_A \;\text{ und }\; f \circ g = id_B\,.$$

Dann ist

$$g = f^{-1}\,.$$

Beweis. id_A und id_B sind bijektiv. Nach Satz 3.12 sind f und g Bijektionen und haben demzufolge Inverse f^{-1} und g^{-1}. Aber dann ist:

$$g = id_A \circ g = (f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ id_B = f^{-1}\,.$$

QED

Satz 3.19 *Es sei $f : A \longrightarrow B$ eine Bijektion. Dann ist f^{-1} ein Bijektion und*

$$(f^{-1})^{-1} = f\,.$$

Beweis. Dies ist aus der Definition klar, aber es ist lustiger, formal zu argumentieren. Wir wenden Satz 3.12 auf $f \circ f^{-1}$ und $f^{-1} \circ f$ an und folgern, dass f^{-1} auch bijektiv ist. Wende nun Satz 3.18 auf $f \circ f^{-1} = id_B$ und $f^{-1} \circ f = id_A$ an und folgere $f = (f^{-1})^{-1}$. QED

Satz 3.20 *Es seien $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ Bijektionen. Dann gilt:*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}\,.$$

Beweis. Nach Satz 3.10 gilt

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ (g \circ f)) = f^{-1} \circ ((g^{-1} \circ g) \circ f) = f^{-1} \circ f = id_A$$

und genauso zeigt man, dass $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = id_C$. Nach Satz 3.18 ist dann $f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$. QED

3.21 Es sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung und $X \subset A$ eine Teilmenge von A. Auf naheliegende Weise definieren wir das Bild $f(X)$ von X unter f als

$$f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}\,.$$

Also ist

$$(\forall y \in B)(y \in f(X) \Leftrightarrow (\exists x \in X)(y = f(x)))$$

eine wahre Proposition. Für Teilmengen $X \subset A$ und $Y \subset A$ gelten folgende Regeln.

1. $X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y)$,

2. $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$,

3. $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.
   Analog zu 2. und 3. gilt:

4. $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$.

5. $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.

Wir zeigen nur Regel 3.: Sei $z \in f(X \cup Y)$. Dann gibt es also ein $x \in X \cup Y$ mit $f(x) = z$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten, $x \in X$ oder $x \in Y$ (oder beides). Im ersten Fall ist $z \in f(X)$, im zweiten Fall ist $z \in f(Y)$. In jedem Fall ist also $z \in f(X) \cup f(Y)$. Wir haben jetzt also gezeigt, dass

$$f(X \cup Y) \subset f(X) \cup f(Y)\,.$$

Jetzt müssen wir noch die umgekehrte Inklusion beweisen. Sei $z \in f(X) \cup f(Y)$. Dann ist also entweder $z \in f(X)$ oder $z \in f(Y)$ (oder beides). Im ersten Fall gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = z$, im zweiten Fall gibt es ein $x \in Y$ mit $f(x) = z$. In jedem Fall gibt es also ein $x \in X \cup Y$ mit $f(x) = z$, also ist $z \in f(X \cup Y)$.

3.22 Bemerke, dass in Regel 2. das Inklusionszeichen $\subset$ steht und nicht das Gleichheitszeichen $=$. Dass das Gleichheitszeichen hier im Allgemeinen in der Tat nicht passt, sehen wir am folgenden Beispiel. Sei $f : \underline{3} \longrightarrow \underline{3}$ gegeben durch $f(1) = 1, f(2) = 2$ und $f(3) = 1$. Wir setzen $X = \{1, 2\}$ und $Y = \{2, 3\}$. Dann ist $f(X) = f(Y) = \{1, 2\}$, also $f(X) \cap f(Y) = \{1, 2\}$. Aber $f(X \cap Y) = f(\{2\}) = \{2\}$.

3.23 Es sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Zu einer Teilmenge $U \subset B$ betrachten wir jetzt die Teilmenge von A, welche aus allen Elementen von A mit Bild in U besteht. Wir notieren diese Teilmenge $f^{-1}(U)$ und nennen sie das *Urbild* von U, oder auch das *inverse Bild* von U. Also

$$f^{-1}(U) := \{x \in A \mid f(x) \in U\}\,.$$

Bemerke, dass f hier keine Inverse haben muss, obwohl wir die Notation $f^{-1}(U)$ benutzen. Es kann zum Glück aber keine Verwirrung entstehen; wenn f eine Inverse besitzt, dann ist das Urbild von U dasselbe wie das Bild unter der inversen Abbildung. Verifiziere dies! Für Teilmengen $U \subset B$ und $V \subset B$ gelten folgende Regeln:

1. $U \subset V \Rightarrow f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$,

2. $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$,

3. $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

   Analog zu 2. und 3. gilt:

4. $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} U_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(U_i)$.

5. $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$.

   Für Teilmengen $X \subset A$ und $U \subset B$ gilt außerdem:

6. $f(f^{-1}(U)) \subset U$,

7. $f^{-1}(f(X)) \supset X$.

Wir zeigen 2 und zeigen, dass in 6 und 7 i.A. keine Gleichheitszeichen stehen. Sei $x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$. Dann ist $x \in f^{-1}(U)$ und $x \in f^{-1}(V)$, also ist $f(x) \in U$ und $f(x) \in V$. D.h. $f(x) \in U \cap V$ und demzufolge ist $x \in f^{-1}(U \cap V)$. Ist umgekehrt $x \in f^{-1}(U \cap V)$, dann ist $f(x) \in U \cap V$, also ist $f(x) \in U$ und $f(x) \in V$. Dies bedeutet $x \in f^{-1}(U)$ und $x \in f^{-1}(V)$, also $x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$. Beispiele zu 4 und 5. Sei $f : \underline{3} \longrightarrow \underline{3}$ gegeben durch $f(1) = f(2) = f(3) = 1$. Wir wählen $X = \{1\}$ und $U = \underline{3}$. Dann ist $f^{-1}(f(X)) = \underline{3}$ und $f(f^{-1}(\underline{3})) = \{1\}$.

3.24 Sind X und Y Mengen, so bezeichnen wir mit

$$Abb(X,Y) := \{f \mid f : X \longrightarrow Y \text{ist eine Abbildung}\}$$

die Menge aller Abbildungen von X nach Y. Eine andere suggestive Schreibweise für diese Menge ist:

$$Y^X := Abb(X,Y)$$

3.25 Zum Schluss noch einige Bemerkungen zur Notation. Zur Verkürzung der Schreibarbeit sieht man oft die Notation fg statt $f \circ g$. Man muss also sehr aufpassen, weil fg auch für die Multiplikation zweier Abbildungen benutzt wird: $fg(x) := f(x) \cdot g(x)$, wenn dies Sinn macht. Aus dem Zusammenhang sollte klar sein, was gemeint ist. Statt dem Begriff "Abbildung" werden oft auch die Namen "Operator", "Transformation" oder "Funktion" benutzt.

4 Relationen

Es sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Wenn wir in der Ebene zwei Koordinatenachsen, eine x-Achse und eine y-Achse, wählen, dann können wir in dieser Ebene den Graphen von f zeichnen. Dieser Graph besteht aus den Punkten (x, y) der Ebene, für die $y = f(x)$. Durch die Auswahl der zwei Koordinatenachsen haben wir die Ebene identifiziert mit der Menge bestehend aus Paaren (x, y), $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$; der Graph von f ist eine Teilmenge davon.

Definition 4.1 Es seien A und B Mengen. Unter dem *kartesischen Produkt* von A mit B verstehen wir die Menge

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

RENÉ DESCARTES (1596-1650)

Bemerkung 4.2 1. Wir haben oben die Ebene eigentlich aufgefasst als $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2. Beachte, dass A und B keine Teilmengen von $A \times B$ sind. Es gibt injektive Abbildungen von A und B in $A \times B$, wenigstens, wenn A und B nicht leer sind. Betrachte zum Beispiel bei fest gewähltem $b_0 \in B$ die Abbildung

$$g : A \longrightarrow A \times B,\ a \mapsto (a, b_0).$$

3. Es gibt ausgezeichnete Abbildungen

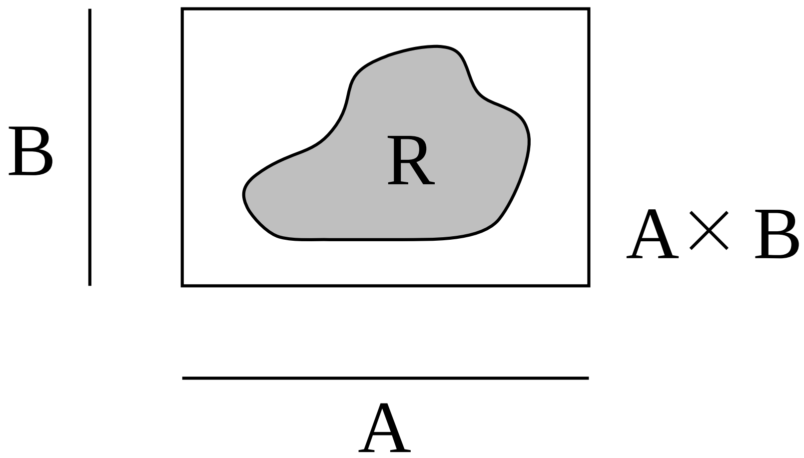
$$p_A : A \times B \longrightarrow A, (a,b) \mapsto a$$

und

$$p_B : A \times B \longrightarrow B, (a,b) \mapsto b\,.$$

Diese Abbildungen nennt man oft die *kanonischen Projektionen* vom kartesischen Produkt auf die Faktoren. Das Wort "kanonisch" bezieht sich hier auf die Tatsache, dass diese Abbildungen ohne zusätzliche Wahl hingeschrieben werden können.

Definition 4.3 Es seien A und B Mengen. Eine Teilmenge R von $A \times B$ heißt *Relation* zwischen Elementen von A und B.



Wir sagen, dass ein Paar $(a,b) \in A \times B$ die Relation R *erfüllt*, wenn $(a,b) \in R$. Notation: Statt $(x,y) \in R$ schreibt man auch oft xRy. Außerdem findet man oft die Notation $x \sim y$ für $(x,y) \in R$.

4.4 Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Der *Graph* von f ist die Teilmenge von $A \times B$ gegeben durch

$$Graph(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B\,.$$

Mit Hilfe des Graphen kann man eine Abbildung auffassen als eine spezielle Relation.

4.5 Ein Spezialfall ergibt sich, wenn $A = B$ und $f = id_A$. Der Graph von id_A wird manchmal angedeutet mit Δ_A. Also

$$\Delta_A = \{(x,x) \mid x \in A\} \subset A \times A\,.$$

Δ_A heißt *Diagonale* von $A \times A$. Die Diagonale entspricht die *Gleichheitsrelation* $=$.

4.6 Weitere Beispiele

1. Sei $A = B$ die Menge aller Menschen und

$$ist\_Mutter\_von := \{(a, b) \in A \times A \mid a \text{ ist Mutter von } b\}.$$

   Dann gilt:

$$(a, b) \in ist\_Mutter\_von \quad \Leftrightarrow \quad a \text{ ist Mutter von } b.$$

2. $A = B = \mathbb{R}$. Betrachte die Relation “größer als”: $x > y$.

$$(a, b) \in R \quad \Leftrightarrow \quad a > b$$

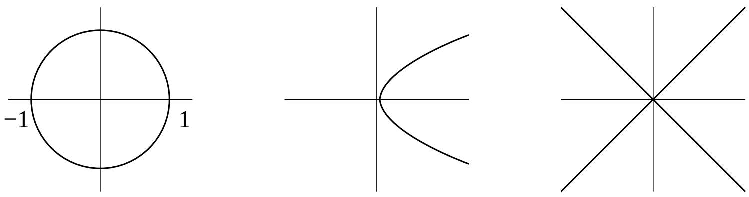
   Die Paare $(1, 0)$, $(3, -1)$, $(5, 4)$ erfüllen die Relation, $(4, 5)$ aber nicht. Zeichne selbst diese Relation R in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

3. $A = B = \mathbb{N}$. Betrachte die Relation “x ist ein Teiler von y”, Notation $x \mid y$. Die Paare $(1, 2)$ und $(3, 6)$ erfüllen die Relation, $(4, 6)$ aber nicht.

4. $A = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann ist

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$$

   eine Relation auf $\mathbb{R}$. R ist also die *Nullstellenmenge* einer Funktion.



$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ $\quad$ $f(x,y) = y^2 - x$ $\quad$ $f(x,y) = x^2 - y^2$

$y=\pm\sqrt{1-x^2}$ $\quad$ $y=\pm\sqrt{x}$ $\quad$ $y=\pm x$

   Diese Relation ist so etwas wie eine “mehrdeutige Funktion”.

5. Sei A eine beliebige Menge, und sei $B := P(A)$ die Potenzmenge von A. Betrachte die Relation “$x \in C$ für ein $x \in A$ und $C \in P(A)$”. Schreibe alle Paare auf, welche die Relation erfüllen für $A = \underline{3} = \{1, 2, 3\}$.

4.7 Der Graph einer Abbildung ist ein Beispiel für eine Relation. Außerdem ist es klar, dass eine Abbildung vollständig durch seinen Graphen bestimmt ist. Es ist aber bestimmt nicht so, dass jede Relation aufgefasst werden kann als Graph einer Funktion; die oben angegebenen Beispiele belegen dies. Aus der Definition ergibt sich ohne weiteres folgender Satz:

Satz 4.8 *Eine Relation $R \subset A \times B$ ist der Graph einer Abbildung $A \longrightarrow B$ genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) Für jedes *$x \in A$ gibt es ein $y \in B$, so dass $(x, y) \in R$.*

(ii) Wenn für $x \in A$, $y' \in B$ gilt $(x, y) \in R$ **und** *$(x, y') \in R$, dann ist $y = y'$.*

Definition 4.9 Sei A eine Menge und sei die Relation $R \subset A \times A$ notiert durch $x \sim y \Leftrightarrow (x, y) \in R$.

- R heißt *reflexiv*, wenn $a \sim a$ für alle $a \in A$,
- R heißt *symmetrisch*, wenn $a \sim b$, genau dann wenn $b \sim a$,
- R heißt *anti-symmetrisch*, wenn $a \sim b$ und $b \sim a \Rightarrow a = b$,
- R heißt *transitiv*, wenn $a \sim b$ und $b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

Beispiele 4.10 Sei $A = \mathbb{R}$.

- Die Relation "$=$" ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.
- Die Relation "$<$" ist anti-symmetrisch und transitiv (aber nicht reflexiv).
- Die Relation "$\leq$" ist reflexiv, anti-symmetrisch und transitiv.
- Die Relation "$\neq$" ist symmetrisch (aber nicht reflexiv und transitiv).

Definition 4.11
- Eine reflexive, anti-symmetrische und transitive Relation auf einer Menge A heißt (*partielle*) *Ordnung* auf A. Solche Ordnungen wollen wir mit "$\leq$" bezeichnen (nach dem obigen Beispiel macht das Sinn).
- Ein Paar $(A, \leq)$ bestehend aus einer Menge A und einer partiellen Ordnung $\leq$ auf A heißt *partiell geordnete Menge.*

- Gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$, so nennt man a und b *vergleichbar*. Sind alle Elemente untereinander vergleichbar, so spricht man von einer *totalen Ordnung*.
- Sei $(A, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Wir schreiben

$$a \geq b, \text{ wenn } b \leq a,$$
$$a < b, \text{ wenn } a \leq b \text{ und } a \neq b.$$

Beispiele 4.12
- $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ sind totale Ordnungen.
- $(\mathbb{N}, |)$ ist eine partielle Ordnung.
- $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ ist eine partielle Ordnung (für jede Menge X).

Definition 4.13 Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation heißt *Äquivalenzrelation*. $\sim$ ist also genau dann Äquivalenzrealtion, wenn gilt:

$$\begin{aligned} a \sim a \quad \text{für } \textit{alle} \quad a \in A \\ a \sim b \Rightarrow b \sim a \\ a \sim b \quad \& \quad b \sim c \Rightarrow a \sim c \end{aligned}$$

Beispiele

1. Die Gleichheitsrelation $I_A \subset A \times A$.
2. Sei A die Menge aller Autos.
$$a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a \text{ und } b \text{ haben die gleiche Farbe.}$$
3. Sei A die Menge aller Menschen.
$$a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a \text{ und } b \text{ haben die gleiche Körpergröße.}$$
4. $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $(n, m) \sim (p, q) \Leftrightarrow n + q = m + p$.
5. $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $(n, m) \sim (p, q) \Leftrightarrow n \cdot q = m \cdot p$.
6. Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung, definiere nun $R \subset A \times A$ durch $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.
7. $A = \mathbb{Z}$, die Menge der ganzen Zahlen und $x \sim y \Leftrightarrow x - y$ ist durch 3 teilbar.

Verifiziere selbst, dass in diesen Fällen tatsächlich eine Äquivalenrelation vorliegt.

4.14 Zu jeder Äquivalenzrelation auf einer Menge A können wir für ein $x \in A$ die Menge R_x der zu x äquivalenten Elemente betrachten, d.h.

$$R_x := \{y \in A \mid (x, y) \in R\}.$$

Die Menge R_x heißt *Äquivalenzklasse von x.* Aus der Definition einer Äquivalenzrelation folgt:

Satz 4.15 *1. $x \in R_x$ für alle $x \in A$.*

2. $R_x = R_y \Leftrightarrow (x, y) \in R$.

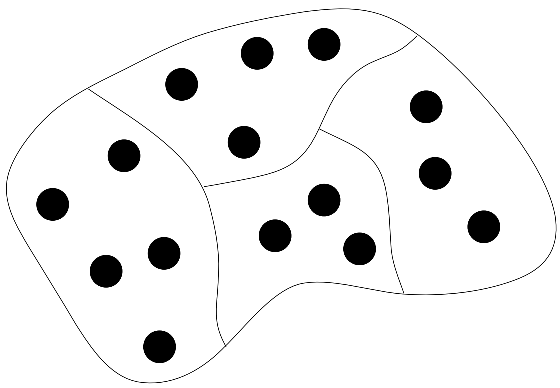
3. Wenn $R_x \neq R_y$, dann $R_x \cap R_y = \emptyset$.

Beweis. 1) folgt unmittelbar aus der Definition, da $(x, x) \in R$.
2) Angenommen $R_x = R_y$. Dann ist $y \in R_x$, also $(x, y) \in R$. Sei umgekehrt $(x, y) \in R$ und es sei $z \in R_x$. Dann ist $(x, z) \in R$ und somit auch $(z, x) \in R$. Weil $(x, y) \in R$, folgt dann $(z, y) \in R$ und somit auch $(y, z) \in R$, d.h. $z \in R_y$. Da $z \in R_x$ beliebig war, folgt $R_x \subset R_y$. Völlig analog zeigt man $R_y \subset R_x$, also gilt $R_x = R_y$.
3) Wir zeigen: $R_x \cap R_y \neq \emptyset \Rightarrow R_x = R_y$. Es sei also $R_x \cap R_y \neq \emptyset$. Dann existiert ein $z \in A$, so dass $z \in R_x$ und $z \in R_y$. Aus 2) folgt dann $R_z = R_x$ und $R_z = R_y$, also $R_x = R_y$. QED

Satz 4.16 *Es sei R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A und sei $\mathcal{C}$ die Kollektion von Teilmengen von A bestehend aus den durch R bestimmten Äquivalenzklassen. Dann ist $\mathcal{C}$ eine* Zerlegung *von A, d.h*

1. $\cup_{C \in \mathcal{C}} C = A$,

2. Für alle $X, Y \in \mathcal{C}$ gilt: $X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$.



Satz 4.17 *Sei $\mathcal{C}$ eine Kollektion von Teilmengen von A. Definiere die Relation R aus A durch $a \sim b$ genau dann, wenn es ein $C \in \mathcal{C}$ gibt mit $a \in C$ und $b \in C$. Wenn $\mathcal{C}$ eine Zerlegung von A definiert, dann ist R eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die Bedingungen für eine Äquivalenzrelation erfüllt sind. Wir verifizieren nur $(a \sim b \wedge b \sim c) \Rightarrow (a \sim c)$. Die Verifikation von $a \sim a$ und $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$ überlassen wir dem Leser. Es sei also $a \sim b$ und $b \sim c$. Es gibt also $X,\ Y \in \mathcal{C}$ mit $a, b \in X$ und $b, c \in Y$. Also $b \in X \cap Y$. Demzufolge ist $X \cap Y \neq \emptyset$, und wegen der beiden Eigenschaften für Zerlegungen folgt $X = Y$. Aber dann sind sowohl a als auch c Elemente von $X \in \mathcal{C}$, also ist $a \sim c$. QED

5 Natürliche Zahlen, Induktion und Anzahl

5.1 Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, mit denen wir zählen, haben eine feste Reihenfolge. In dieser Reihenfolge hat jede natürliche Zahl n genau einen Nachfolger, nämlich $n+1$. Außerdem gibt es zu jeder natürlichen Zahl, mit Ausname der 1, genau eine natürliche Zahl, von der sie Nachfolger ist. Wir können die natürlichen Zahlen also folgendermassen aufgebaut denken: angefangen mit der 1 nehmen wir ihren Nachfolger $2 := 1 + 1$, dann ihren Nachfolger $3 := 2 + 1$, etc. Dieses Prinzip wird exakt erfasst durch folgendes **Induktionsaxiom** von PEANO:

GIUSEPPE PEANO (1858-1932)

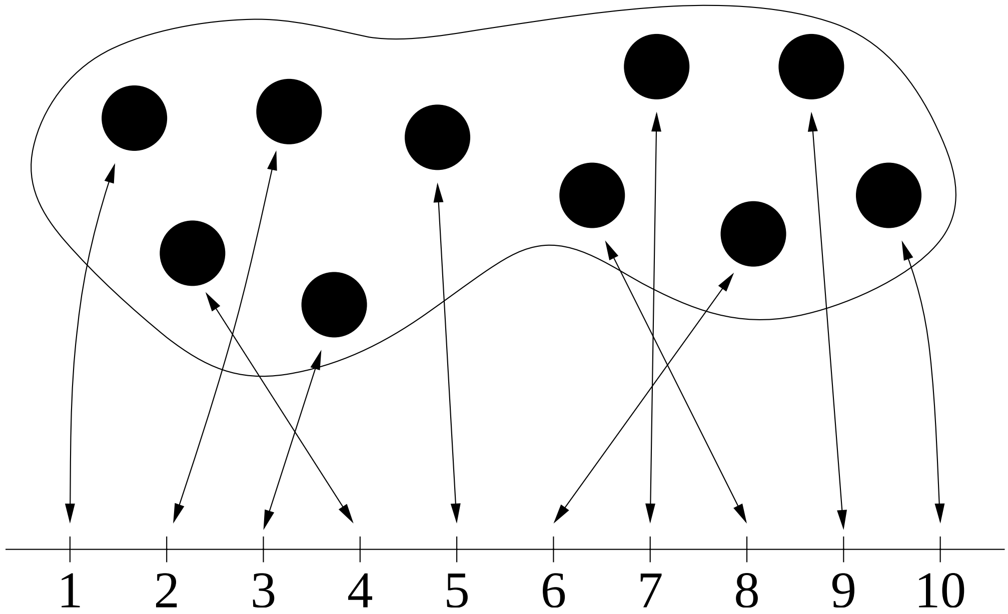
Sei $V \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit den folgenden zwei Eigenschaften

1. $1 \in V$,
2. $n \in V \Rightarrow n + 1 \in V$.

Dann ist $V = \mathbb{N}$.

5.2 Auf diesem Axiom beruht das Prinzip des Beweises durch *vollständige Induktion*: Es sei $P(n)$ eine Aussage, welche von einer natürlichen Zahl n abhängt. Ist $P(1)$ wahr, und können wir aus der *Voraussetzung*, dass $P(n)$ wahr ist, ableiten, dass auch $P(n+1)$ wahr ist, dann ist $P(n)$ wahr für *alle* $n \in \mathbb{N}$. Betrachte nämlich die Menge $V := \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$. Dann ist $1 \in V$ und es gilt $(n \in V \Rightarrow n+1 \in V)$, da $P(1)$ wahr ist und aus der Wahrheit von $P(n)$ die von $P(n+1)$ folgt. Dies sind genau die Voraussetzungen beim Axiom von Peano, also ist $V = \mathbb{N}$, d.h. $P(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

5.3 Die Anzahl der Elemente einer Menge A zählen wir, indem wir sie nacheinander in einer Reihe aufstellen und so versehen mit Nummern $1, 2, 3, \ldots$. Die letzte Nummer, die wir brauchen, ist dann *die Anzahl der Elemente* $|A|$ von A (manchmal auch $\#A$). Eigentlich konstruieren wir also eine *Bijektion* von A mit einem Anfangsstück $\underline{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$ der natürlichen Zahlen.



Es ist klar, dass dies nur gut geht, wenn die Anzahl der Elemente von A *endlich* ist. Wir setzen $|\emptyset| = 0$. Einige elementare Rechenregeln für endliche Mengen sind:

1. $|A| = |B| \Leftrightarrow$ es gibt eine Bijektion $A \longrightarrow B$.

2. $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$.

3. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

4. $|A^B| = |A|^{|B|}$

Es gibt also genau eine Million Abbildungen $\{1, 2, \ldots, 6\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, 10\}$

5. $X \subset A \Rightarrow |X| \leq |A|$.

6. Wenn $X \subset A$ und $|X| = |A|$, dann $X = A$.

6 Kardinalität

Das Zählen von Elementen in einer Menge ist also auf den Begriff der Bijektion zurückzuführen. Die entscheidende Idee von CANTOR war folgende: Da der Begriff der Bijektion unabhängig von Anzahlen definiert ist, können wir dies auch anwenden auf unendliche Mengen und gewissermaßen diese auch zählen!

Definition 6.1 Zwei Mengen A und B heißen *gleichmächtig*, wenn es eine Bijektion $\alpha : A \longrightarrow B$ gibt. Um anzugeben, dass zwei Mengen gleichmächtig sind, schreibt man

$$|A| = |B|$$

und sagt auch, A und B haben die gleiche *Kardinalität*.

Definition 6.2 Eine Menge X heißt *endlich*, wenn

$$|X| = |\{k \in \mathbb{N} \, | k \leq n\}|$$

für ein $n \in \mathbb{N}_0$.
Eine Menge X heißt *abzählbar (unendlich)*, wenn

$$|X| = |\mathbb{N}|.$$

Eine Menge X heißt *überabzählbar*, wenn sie nicht endlich und nicht abzählbar ist.

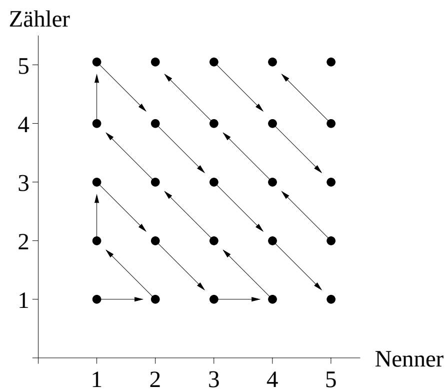
Beispiele 6.3 • $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ und $\{2, 3, 4, \ldots\}$ sind gleichmächtig, die Abbildung $n \mapsto n + 1$ ist eine Bijektion, obwohl die rechte Menge eine echte Teilmenge ist. Für endliche Mengen kann so etwas nicht passieren: eine echte Teilmenge hat auch echt weniger Elemente.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ und $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \ldots\}$ sind gleichmächtig; eine Bijektion ist gegeben durch $f : \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}, n \mapsto 2n$.

- $\mathbb{Z}$ ist abzählbar: eine Bijektion $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ist gegeben durch

$$1 \mapsto 0,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto -1,\ 4 \mapsto 2,\ 5 \mapsto -2,\ 6 \mapsto 3,\ 7 \mapsto -3,\ \ldots$$

- $\mathbb{Q}$ ist abzählbar: Um das einzusehen, kann man zum Beispiel alle (positiven) Brüche in das folgende Schema schreiben und dieses diagonal durchlaufen (doppelt gezählte Brüche weglassen):



Eine Bijektion $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}^+ := \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$ ist also durch die Reihenfolge der Brüche im Schema gegeben. Genauso kann man die negativen Brüche zählen und erhält schließlich durch Zählen der 0 und danach abwechselndes Zählen eines positiven und eines negativen Bruchs eine Bijektion $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$.

- $\mathbb{R}$ ist überabzählbar. Um das zu beweisen, nehmen wir zunächst einmal das Gegenteil an. Wir interessieren uns dabei gar nicht für die Vorkommastellen. Wir könnten also alle Zahlen aus $[0, 1)$ in einer Tabelle aufschreiben, am besten in ihrer Dezimalschreibweise. Die Tabelle könnte etwa so anfangen:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
0, & 1 & 4 & 5 & 9 & 6 & 8 & 8 & 9 & 1 & 2 & 5 & 3\ldots \\
0, & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 4\ldots \\
0, & 8 & 7 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots \\
0, & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5\ldots \\
0, & 3 & 4 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 & 4 & 0 & 3 & 4 & 6\ldots \\
0, & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 5\ldots \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots
\end{array}$$

Zahlen, deren Dezimaldarstellung abbricht, füllen wir mit Nullen auf. Wir konstruieren jetzt eine Zahl aus $[0, 1)$, die nicht in der Tabelle enthalten sein *kann* und erhalten so einen Widerspruch. Und zwar wählen wir diese neue Zahl so, dass an der i-ten Stelle nach dem Komma etwas anderes steht als an der i-ten Nachkommastelle der i-ten Zahl in der Tabelle. Unsere neue Zahl könnte also etwa so anfangen:

$$0,358765\ldots$$

Warum kommt diese Zahl **nicht** in unserer Tabelle vor?

Satz 6.4 *(G. Cantor) Eine Abbildung $f : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ kann nie surjektiv sein. Die Mengen X und $\mathcal{P}(X)$ sind also nie gleichmächtig.*

Beweis. Die Menge

$$X_f := \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X)$$

gehört nicht zu der Bildmenge $f(X) \subset \mathcal{P}(X)$. Angenommen nämlich, $X_f = f(y)$ für ein $y \in X$, so ist

$$y \in f(y) \Leftrightarrow y \in X_f \Leftrightarrow y \notin f(y),$$

ein Widerspruch! QED

Definition 6.5 Wir schreiben $|X| \leq |Y|$ und sagen, Y *hat eine größere Kardinalität* als X, wenn eine Injektion $X \hookrightarrow Y$ existiert. Weil die Komposition von zwei Injektionen wieder eine Injektion ist, gilt

$$|X| \leq |Y| \text{ und } |Y| \leq |Z| \Rightarrow |X| \leq |Z|.$$

Aber was ist, wenn $|X| \leq |Y|$ und $|Y| \leq |X|$?


Ernst Schröder (1841-1902) Felix Bernstein (1878-1956)

Satz 6.6 Satz von Cantor-Schröder-Bernstein

$$|X| \leq |Y|, \;\; \textit{und} \;\; |Y| \leq |X| \Rightarrow |X| = |Y|\,.$$

In Klartext heißt dies:

Existieren Injektionen

$$f : X \hookrightarrow Y \quad \textit{und} \quad g : Y \hookrightarrow X\,,$$

so existiert auch eine Bijektion

$$h : X \longrightarrow Y\,.$$

Beweis. (Nach A. Zelevinsky). Gegeben sind die Injektionen $f : X \hookrightarrow Y$ und $g : Y \hookrightarrow X$ und zu konstruieren ist eine Bijektion $H : X \longrightarrow Y$. Für eine beliebige Teilemenge $A \subset X$ setzen wir

$$F(A) := X \setminus g(Y \setminus f(A))\,.$$

Erst wird also $f(A) \subset Y$ gebildet, dann das Komplement $Y \setminus f(A)$ genommen. Auf diese Menge wird g angewendet und wir bekommen $g(Y \setminus f(A))$. Schließlich nehmen wir wieder das Komplement in X. Wir können, wenn wir wollen, F als eine Abbildung von $\mathcal{P}(X)$ in sich selbst auffassen. Wir suchen nun eine Menge A_0 mit der Eigenschaft, dass

$$F(A_0) = A_0\,.$$

Es ist dann $X \setminus A_0 = g(Y \setminus f(A_0))$. Wir erhalten dann Bijektionen

$$g^{-1} : X \setminus A_0 \longrightarrow Y \setminus f(A_0)\,,$$

$$f : A_0 \longrightarrow f(A_0)\,,$$

also zusammen eine Bijektion

$$h : X \longrightarrow Y, \;\; h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{wenn} \quad x \in A_0 \\ g^{-1}(x) & \text{wenn} \quad x \notin A_0\,. \end{cases}$$

Starte nun mit X und wende darauf F wiederholt an; wir bekommen

$$X \supset F(X) \supset F(F(X)) \supset \ldots$$

Setze

$$A_0 := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F^{(k)}(X)\,,$$

wobei $F^{(k)} = F \circ F^{(k-1)}$ die k-fache Komposition von F mit sich selbst ist.
Behauptung: Sind $B_i \subset X$, $i \in I$, beliebige Teilmengen von X, so gilt

$$F(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} F(B_i).$$

Beweis: Überlege erst, dass $f(\bigcap B_i) = \bigcap f(B_i)$, weil f *injektiv* ist. Überlege weiter, welche Regel bei der Umformung benutzt wurde.

$$\begin{aligned} F(\bigcap B_i) &= X \setminus g(Y \setminus f(\bigcap B_i)) \\ &= X \setminus g(Y \setminus \bigcap f(B_i)) \\ &= X \setminus g(\bigcup(Y \setminus f(B_i))) \\ &= X \setminus \bigcup g(Y \setminus f(B_i)) \\ &= \bigcap(X \setminus g(Y \setminus f(B_i))) \\ &= \bigcap F(B_i)\,. \end{aligned}$$

Es folgt nun:

$$F(A_0) = F(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F^{(k)}(X)) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F(F^{(k)}(X)) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F^{k+1}(X) = A_0\,.$$

Damit haben wir unser Ziel erreicht. QED

6.7 Der Satz hat viele Anwendungen. Die Abbildungen

$$f : [0,1] \longrightarrow (0,1), \;\; x \mapsto 1/2x + 1/3$$

und

$$g : (0,1) \longrightarrow [0,1], x \mapsto x$$

sind beide injektiv. Es folgt, dass es eine Bijektion zwischen $[0,1]$ und $(0,1)$ gibt, aber eine konkret anzugeben is gar nicht so einfach!

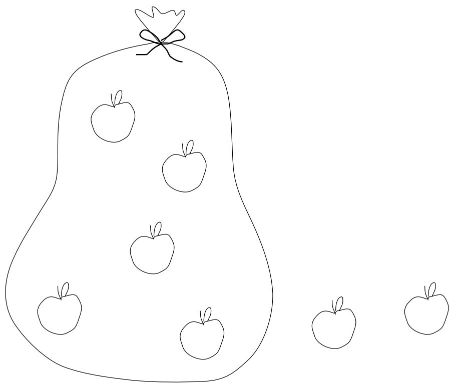
6.8 Kontinuumshypothese: In 1878 stellte Cantor folgende Frage: Betrachte eine Menge A mit

$$\mathbb{N} \subset A \subset \mathbb{R}\,.$$

Ist dann immer A gleichmächtig mit $\mathbb{N}$, $|A| = |\mathbb{N}|$, oder mit $\mathbb{R}$, $|A| = |\mathbb{R}|$? Cantor hat den Rest seines Lebens vergebens versucht, diese Frage zu beantworten. Es stellt sich heraus: mit den Axiomen der sogenannten ZFC-Mengenlehre ist diese Frage *unentscheidbar*!

7 ZFC

Wir haben bisher Mengen als schreibarbeitsparende Abkürzungen kennen gelernt. Im systematischen Aufbau der Mathematik spielt die Mengenlehre eine weitaus wichtigere Rolle. In dieser Betrachtungsweise sind alle mathematischen Objekte und Zusammenhänge letzten Endes irgendwelche Mengen. Was ist aber eine Menge? Dazu sagte G. Cantor: *Unter eine Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkes zu einem Ganzen.*



Obwohl dies intuitiv klar scheint, muss man aufpassen! Der Logicus und Philosoph Bertrand Russel entdeckte 1903 folgendes Paradoxon:

BERTRAND RUSSEL (1872-1970)

Nenne eine Menge x *gewöhnlich*, wenn $x \notin x$. Die meisten Mengen, die Sie kennen, sind gewöhnliche Mengen. $\{1,2\}$, $\{1,\{2,3\},\{1,2,3\}\}$, $\mathbb{N}$ etc, sind Beispiele von gewöhnlichen Mengen. Es gibt aber sicherlich auch ungewöhnliche Mengen, zum Beispiel die Menge M aller Mengen, welche mindestens zwei Elemente enthalten: Es ist $\{1,2\} \in M$, $\{2,3\} \in M$, also enthält M sicherlich mindestens zwei Elemente und somit ist $M \in M$. Wir bilden nun die sogenannte *Russel-Menge*

$$\mathcal{R} := \{x \mid x \notin x\},$$

welche genau alle gewöhnlichen Mengen als Elemente hat.
Die Bombe explodiert, wenn wir fragen

Ist $\mathcal{R}$ eine gewöhnliche Menge?

Wenn ja, dann ist $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$, also ist $\mathcal{R}$ ungewöhnlich. Wenn nein, dann ist $\mathcal{R}$ eine ungewöhnliche Menge, also $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$, aber dies bedeutet, dass $\mathcal{R}$ als Element der Menge aller gewöhnlichen Mengen gewöhnlich ist ... Wir haben einen echten Widerspruch.[2]

Das Paradoxon von Russel zeigt, dass wir nicht alles als Menge zulassen können. Wir müssen präzisieren, was wir unter *bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkes* verstehen.

[2] Ein bekannte Parafrasierung in der Alltagssprache ist: Der Barbier rasiert jeden im Dorf, der sich selber nicht rasiert. Wer rasiert den Barbier?


Ernst Zermelo (1871-1953) Adolf Fraenkel (1891-1965)


John von Neumann (1903-1957), Thoralf Skolem (1887-1963)

Zermelo, Fraenkel, von Neumann und Skolem stellten ein Axiomensystem für die Mengenlehre und somit für die Grundlagen der gesamten Mathematik auf. Diese Axiomen sind in der Sprache der formalen Logik formuliert. Sie erzählen uns nicht, was Mengen sind, sondern nur, wie wir mit Mengen umgehen dürfen. Wir wollen hier nicht das vollständige ZFC-System besprechen; das würde den Rahmen dieses Textes sprengen, weil wir erst die formale Logik entwickeln müssten. Außerdem sind die genauen Details in der Praxis nicht so wichtig; wahrscheinlich können die wenigsten professionellen Mathematiker Ihnen dieses ganze Regelsystem vorbeten!
Die Hauptideen des ZFC-Systems sind:

- Es gibt nur Mengen und eine Relation $\in$. Elemente einer Menge sind selbst wieder Mengen.
- Die Axiome erlauben nur wenige Standardkonstruktionen und somit entstehen nur Mengen, die nicht "zu groß" sind.
- Die Existenz einer unendlichen Menge wird vorausgesetzt.

Das **Extensionalitätsaxiom**

$$A = B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

besagt, dass eine Menge durch seine Elemente bestimmt ist. Einige **Kleinkram-Axiome** garantieren, dass wir aus zwei Mengen A und B die Mengen $A \cup B$, $A \cap B$, $A \times B$ bilden können. Hierbei benutzt man einen Trick von KURATOWSKI:

KAZIMIERZ KURATOWSKI, (1896-1980)

man *definiert* ein geordnetes Paar durch die Festlegung

$$(a, b) := \{a, \{a, b\}\}$$

Innerhalb des ZFC-System kann man die natürlichen Zahlen folgendermaßen *definieren*:

$$0 := \emptyset,\ 1 := \{\emptyset\},\ 2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$$

Allgemein definieren wir den *Nachfolger* von n als $n \cup \{n\}$. Das **Unendlichkeitsaxiom** postuliert nun die Existenz einer Menge $\mathbb{N}_0$ mit genau diesen Elementen. Obwohl wir nie in der Lage sind, alle Zahlen durchzuzählen, wird in ZFC also postuliert, dass die Menge der ganzen Zahlen irgendwie als *fertiges Objekt* existiert. Mit den ZFC-Axiomen der Mengenlehre kann man das Induktions-Axiom nun *beweisen*.
Das **Aussonderungsaxiom** besagt: ist A eine Menge und ist P eine Eigenschaft, welche auf Elemente von A zutreffen kann, so ist auch

$$\{x \in A \mid P(x)\}$$

eine Menge. Dieses Axiom erlaubt es uns, ausgehend von einer bekannten Menge, die Konstruktion von sehr viel neuen Mengen, die aber alle Teilmengen unserer Ausgangsmenge sind. Das

Potenzmengenaxiom besagt: ist A eine Menge, so existiert eine Menge $\mathcal{P}(A)$, deren Elemente genau die Teilmengen von A sind:

$$B \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow B \subset A\,.$$

Dieses Axiom ermöglicht die Bildung von recht großen Mengen. Versuchen Sie sich eine Vorstellung zu machen von *allen* Teilmengen von $\mathbb{N}$ ...

Vereinigungsaxiom
Sei A ein Menge. Dann gibt es eine Menge $\cup A$, dessen Elemente genau die Elemente der Mengen sind, welche Elemente von A sind:

$$\exists \cup A : a \in \cup A \Leftrightarrow \exists B \in A : a \in B\,.$$

Zum Beispiel:
$A = \{\{1,2\},\{4,5\},\{7,8\},\ldots\}$. $\cup A = \{1,2,4,5,7,8,\ldots\}$
Oft sind die Mengen indiziert durch eine Indexmenge I, $A = \{A_i; i \in I\}$. Wir schreiben

$$\bigcup_{i\in I} A_i$$

für die Vereinigung aller dieser Mengen. Eine ähnliche Notation wird für den Durchschnitt benutzt:[3]

$$\bigcap_{i\in I} A_i\,.$$

Auswahlaxiom (Axiom of Choice)
Sei A eine Menge, deren Elemente *nicht leere Mengen* sind. Dann gibt es eine *Auswahlmenge* C, dessen Elemente man erhält, indem wir aus jedem Element von A genau ein Element *auswählen*. Anders gesagt: Es gibt eine Menge C mit der Eigenschaft

$$\forall B \in A \;\; \exists!\, c \in B \cap C\,.$$

Beispiel:
$A = \{\{1,2\},\{4,5\},\{7,8\},\{9,10\},\ldots\}$. Es gibt viele Möglichkeiten, aus jeder dieser Mengen ein Element auszuwählen, zum Beispiel können wir immer das kleinste Element nehmen. Dies führt auf die Menge $C = \{1,4,7,9,\ldots\}$. Aber die Menge $\{1,5,8,9,\ldots\}$ ist genau so gut eine Auswahlmenge.

[3]Frage:Warum brauchen wir kein Extra-Axiom für die Existenz beliebiger Durchschnitte?

Bertrand Russel hat dieses Axiom folgendermaßen parafrasiert: Ist A die Menge aller Schuhpaare, so kann man für C zum Beispiel die Menge der rechten Schuhe nehmen. Ist A die Menge der Sockenpaare, so ist es aber nicht so klar, wie wir aus jedem Paar eins auswählen können. Das Auswahlaxiom stellt sozusagen sicher, dass es immer irgendeine Auswahlmöglichkeit gibt, ohne sie explizit angeben zu müssen.

So weit die wichtigsten Axiomen des ZFC-Systems. [4] Wie steht es nun um das Paradoxon von Russel?

Betrachten wir das Universum U, das heißt die Menge aller Mengen. Das ist so einfach gesagt, aber im ZFC-System kann U keine Menge sein. Sonst könnten wir mit Hilfe des Aussonderungsaxioms die Menge

$$\{x \in U \mid x \notin x\}$$

bilden, und würden dann nach wie vor das Russelsche Paradoxon bekommen.

Im ZFC-System ist man bescheiden, und das Universum existiert nicht als Menge.

8 Aufgaben

1. Sei $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{1, 2, 5, 6\}$. Bestimme $(A \cap B) \cup C$, $(B \cap C) \cup A$,$(C \cap A) \cup B$, $A \cap (B \cup C)$, $B \cap (C \cup A)$, $C \cap (A \cup B)$.

2. Bestimme alle Teilmengen von $\emptyset$, $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$.

3. Beweise das zweite Distributivgesetz
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
aus der Definition von $\cap$ und $\cup$.

4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ ist im Allgemeinen nicht richtig. Zeige dies an Hand einer Zeichnung.

5. Beweise die de Morgansche Regeln.

6. Beweise
$$(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C), \quad A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C),$$

[4] Z steht für Zermelo, F für Fraenkel und C für Choice, also für das Auswahlaxiom. Es gibt Mathematiker, die das Auswahlaxiom nicht benutzen möchten.

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C), \;\; A \setminus (B \cap C) = (a \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

7. Welche der folgenden Aussagen sind wahr (hierbei sind x,y reelle Zahlen.)
   7.1. $0 < 1 \vee 1 > 2$
   7.2. $0 > 1 \wedge 1 > 2$
   7.3. $0 < 1 \Rightarrow 1 < 2$
   7.4. $0 > 1 \Rightarrow 1 > 2$
   7.5. $(\exists x)x^2 = 4$
   7.6. $(\exists! x)x^2 = 4$
   7.7. $(\forall x)(\exists y)x < y$
   7.8. $(\exists x)\forall y)x < y$
   7.9. $(\forall x)(\forall y)[x < 0 \wedge y < 0 \Rightarrow xy > 0]$
8. Verneine die Propositionen aus Aufgabe 7. Sorge dafür, dass in den neuen Propositionen das Zeichen $\neg$ nicht vorkommt.
9. Welche Regeln für Mengen entsprechen folgenden Tautologien?
   - $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
   - $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
   - $(p \Leftrightarrow r) \Rightarrow [p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r]$.
10. Leite aus $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)[x \in A \Rightarrow x \in B]$ ab: $A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x)[x \in A \vee x \notin B]$.
11. Zeichne die Relationen
   - "x ist ein Teiler von y", für $x \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$ und $y \in \underline{12}$.
   - "$x^2 - y^2 = 0$" für $x, y \in \mathbb{R}$.
   - "$|x^2 - y^2| < 1/2$" für $x, y \in \mathbb{R}$.
12. Betrachte die Relation zwischen reellen Zahlen x, y, gegeben durch $x^2 - xy - 1 = 0$. Auf welchen Teilmengen bestimmt dies eine Funktion $x \mapsto y$ resp. $y \mapsto x$? Welche Werte werden angenommen? Injektiv? Dieselben Fragen für $x^3 - x^2 y - 1 = 0$.
13. Betrachte einen Punkt p in der Ebene; A ist die Menge aller Punkte der Ebene, B die Menge aller Geraden durch p. Betrachte die Relation "x liegt auf Y" für $x \in A$ und $Y \in B$.

13.1. Zeige, dass diese Relation keine Abbildung $A \longrightarrow B$ definiert.

13.2. Bestimme alle Teilmengen von A, auf welcher die Relation eine Abbildung definiert.

13.3. Gebe Beispiele von Teilmengen, für die die Abbildung a) surjektiv aber nicht injektiv, b) injektiv, aber nicht surjektiv, c) keins von beidem, d) bijektiv ist.

14. Bestimme für $A = \underline{2}$ und $B = \underline{3}$ die 9 Abbildungen $f : A \longrightarrow B$ und die 8 Abbildungen $g : B \longrightarrow A$. Für welche Paare gilt $g \circ f = id_A$ und für welche $f \circ g = id_B$?

15. Für $f : A \longrightarrow B$ und $X, Y \subset A$ gilt $X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y)$. Gebe ein Beispiel, wo $f(X) \subset f(Y)$, aber $X \not\subset Y$ gilt.

16. Sei V die Menge aller reellwertige Funktionen auf $\mathbb{R}$. Wir definieren eine Relation R mittels

$$R = \{(f, g) \mid f(0) = g(0) \ \text{und} f(1) = g(1)\}$$

Ist R eine Äquivalenzrelation?

17. Gebe ein Beispiel einer Injektion $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, welche keine Surjektion ist. (Paradoxon von Gallilei.)